UDRUŽENJE MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE / BOSNIAN MATHEMATICAL SOCIETY
Zmaja od Bosne 35/IV, 71000 Sarajevo, Bosnia and Herzegovina
Tel. (++387)(33) 279-935; Fax: (++387)(33) 649-342

51. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE
FEDERALNO PRVENSTVO UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA
Sarajevo, 16. 4. 2011. godine

II razred

1. Odrediti koeficijent c polinoma x^2+x+c ako njegove nule x_1 i x_2 zadovoljavaju jednakost:

$$\frac{2x_1^{\,3}}{2+x_2}+\frac{2x_2^{\,3}}{2+x_1}=-1.$$

2. Neka je $p>2$ prost broj i neka su m i n prirodni brojevi takvi da je

$$\frac{m}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{p-1}.$$

Dokazati da je broj m djeljiv brojem p.

3. Neka je I centar upisane kružnice, a O centar opisane kružnice trougla ABC, pri čemu je $\angle ACB=30^\circ$. Na stranicama AC i BC odabrane su tačke E i D redom, tako da vrijedi $EA=AB=BD$. Dokazati da je $DE=IO$ i $p(D,E)\perp p(I,O)$.

4. Neka je n prirodan broj i posmatrajmo skup $S=\{n,n+1,n+2,\ldots,5n\}$.
   a. Dokazati da ako je skup S razbijen na dva disjunktna podskupa, onda postoje tri broja x, y, z (ne obavezno različita) koji pripadaju istom podskupu skupa S i za koje vrijedi $x+y=z$.
   b. Da li tvrdnja pod a. vrijedi ako umjesto skupa S posmatramo skup $S'=\{n,n+1,n+2,\ldots,5n-1\}$? Odgovor obrazložiti!

Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.
Vrijeme za rad: 3 sata i 30 minuta.

SRETNO!