UDRUŽENJE MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE / BOSNIAN MATHEMATICAL SOCIETY
Zmaja od Bosne 35/IV, 71000 Sarajevo, Bosnia and Herzegovina
Tel. (++387)(33) 279-935; Fax: (++387)(33) 649-342

51. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE
FEDERALNO PRVENSTVO UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA
Sarajevo, 16. 4. 2011. godine

IV razred

1. Neka su AD i BE simetrale unutrašnjih uglova trougla ABC. Neka su x, y i z udaljenosti od tačke M, koja leži na segmentu DE, do stranica BC, CA i AB, respektivno. Dokazati da vrijedi $z = x + y$.

2. Ako za realne brojeve x i y vrijedi da je $\left(x+\sqrt{1+y^2}\right)\left(y+\sqrt{1+x^2}\right)=1$, dokazati da vrijedi jednakost
$$\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)=1.$$

3. Dokazati da je za sve prirodne brojeve n za koje je $n+1$ djeljivo sa 24, zbir svih pozitivnih djelioca broja n također djeljiv sa 24.
(Npr. broj 120 je djeljiv sa 24, a svi pozitivni djelioci broja 120 - 1 = 119 su 1, 7 , 17 i 119 i za njih vrijedi da je njihov zbir 1 + 7 + 17 + 119 = 144 djeljiv sa 24.)

4. Dokazati da se među svakih 6 iracionalnih brojeva mogu izabrati tri broja a, b, c takva da su brojevi $a+b,\ b+c,\ c+a$ opet iracionalni.

Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.
Vrijeme za rad: 3 sata i 30 minuta.

SRETNO!

IV RAZRED

1. Zadatak

Neka su AD i BE simetrale unutrašnjih uglova trougla ABC. Neka su x, y i z udaljenosti od tačke M, koja leži na segmentu DE, do stranica BC, CA i AB, respektivno. Dokazati da vrijedi:

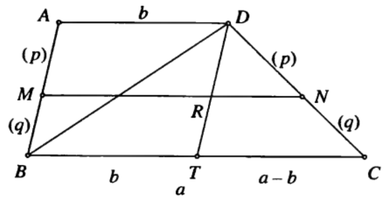
$$z = x + y.$$

<u>Rješenje:</u>

<u>Lema</u>: Neka je $ABCD$ trapez sa paralelnim stranicama $AD = b$ i $BC = a$. Dužina segmenta MN, koji dijeli stranice AB i CD u omjeru $p: q$, iznosi:

$$MN = \frac{ap + bq}{p + q}.$$

<u>Dokaz:</u>



Lako je dokazati da je $MN \parallel BC \parallel AD$ (posmatrati paralelu sa osnovicom kroz tačku M i trouglove ABD i BDC).

Neka je $a > b$. Konstruišimo paralelogram $ABTD$ i označimo presjek pravih MN i DT sa R.

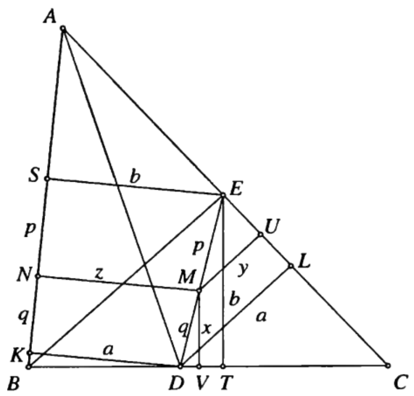
Imamo da vrijedi:

$$\frac{RN}{TC} = \frac{p}{p+q} \Longrightarrow RN = (a-b)\frac{p}{p+q}.$$

$$MN = MR + RN = b + (a-b)\frac{p}{p+q} = \frac{ap + bq}{p + q}.$$

Za $a = b$, četverougao je paralelogram i formula vrijedi.

Vratimo se sada našem početnom problemu. Pretpostavimo da tačka M dijeli segment ED u omjeru $p: q$. Neka su S i K podnožja normala iz tačaka E i D, respektivno, na stranicu AB.



Iz činjenice da vrijedi $MN \parallel ES \parallel DK$ slijedi $\frac{SN}{NK} = \frac{p}{q}$.

Pretpostavimo da je $SE = b$ i $DK = a$. Neka su T i L podnožja normala iz tačaka E i D na stranice BC i AC, respektivno.

Tačke D i E pripadaju simetralama unutrašnjih uglova, pa vrijedi $DL = DK = a$ i $ET = ES = b$.

Primjenjujući lemu zaključujemo:

$$z = \frac{ap + bq}{p + q}.$$

Iz trougla DET slijedi:

$$x = \frac{bq}{p + q}.$$

Analogno, iz trougla EDL slijedi:

$$y = \frac{ap}{p + q}.$$

Kombiniranjem posljednjih jednakosti imamo da vrijedi:

$$z = x + y.$$

2. Zadatak

Ako za realne brojeve x i y vrijedi da je $\left(x+\sqrt{1+y^2}\right)\left(y+\sqrt{1+x^2}\right)=1$, dokazati da vrijedi jednakost

$$\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)=1.$$

Rješenje:

Primijetimo najprije da ne mogu oba broja x i y biti pozitivna. Naime, ako bi to bilo onda bi oba faktora na lijevoj strani $\left(x+\sqrt{1+y^2}\right)\left(y+\sqrt{1+x^2}\right)=1$ bila veća od 1, što je nemoguće.
Zbog simetričnosti, možemo pretpostaviti da je $y \geq x$. Tada mora biti $x<0$.
Pokažimo da ne može biti $y>-x$. Ako bi bilo $y>-x$, onda bi slijedilo $y^2>x^2$.
Tada je

$$y+\sqrt{1+x^2}>-x+\sqrt{1+x^2}>0,$$
$$x+\sqrt{1+y^2}>x+\sqrt{1+x^2}>0.$$

Množenjem ove dvije nejednakosti dobije se

$$1=\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)>1+x^2-x^2=1,$$

što je očigledna kontradikcija.
Pokažimo da ne može biti ni $y<-x$. Ako bi bilo $y<-x$, onda bismo imali $x \leq y<-x$, pa bi vrijedilo

$$0<y+\sqrt{1+x^2}<-x+\sqrt{1+x^2},$$
$$0<x+\sqrt{1+y^2}<x+\sqrt{1+x^2}.$$

Množenjem ove dvije nejednakosti dobije se

$$1=\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)<1+x^2-x^2=1,$$

što je opet očigledna kontradikcija.
Dakle, mora biti $y=-x$, pa vrijedi

$$\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)=\left(x+\sqrt{1+(-x)^2}\right)\left(y+\sqrt{1+(-x)^2}\right)=$$
$$=\left(x+\sqrt{1+y^2}\right)\left(y+\sqrt{1+x^2}\right)=1,$$

što je i trebalo dokazati.

3. Zadatak

Dokazati da je za sve prirodne brojeve n za koje je $n+1$ djeljivo sa 24, zbir svih pozitivnih djelioca broja n također djeljiv sa 24.

(Npr. broj 120 je djeljiv sa 24, a svi pozitivni djelioci broja $120-1=119$ su 1, 7, 17 i 119 i za njih vrijedi da je njihov zbir $1+7+17+119=144$ djeljiv sa 24.)

Rješenje:

Ako je $n+1$ djeljivo sa 24, onda je $n=24k-1$, za neki prirodan broj k. Neka su a i b komplementarni djelioci broja n, tj.

$$ab=n=24k-1.$$

Tada brojevi a i b nisu djeljivi sa 2 i 3, jer desna strana nije djeljiva ni sa brojem 2, ni sa brojem 3.

Posmatrajmo proizvod

$$a(a+b)=a^2+ab=a^2-1+24k=(a-1)(a+1)+24k.$$

Broj a nije djeljiv sa 2, pa su brojevi $a-1$ i $a+1$ uzastopni parni brojevi i njihov proizvod je djeljiv sa 8. S druge strane, jedan od brojeva $a-1$, a, $a+1$ je djeljiv sa 3, a kako to nije broj a, to je proizvod $(a-1)(a+1)$ djeljiv i sa 3.

Dakle,

$$24|a(a+b).$$

Iz $(24,a)=1$ slijedi $24|a+b$, tj. zbir dva komplementarna djelioca broja n je djeljiv sa 24.

Ako n nije potpun kvadrat kombiniramo pozitivne djelioce broja n koji su manji od $\sqrt{n}$ sa njihovim pozitivnim komplementarnim djeliocima koji su veći od $\sqrt{n}$. U ovom slučaju, zbir svih pozitivnih djelioca broja n je djeljiv sa 24.

Neka je sada n potpun kvadrat. Tada vrijedi:

$$a^2=24k-1,$$

tj.

$$8|(a-1)(a+1)=24k-2$$

što nije moguće. Kontradikcija sa pretpostavkom da je broj n potpun kvadrat!

4. Zadatak

Dokazati da se među svakih 6 iracionalnih brojeva mogu izabrati tri broja a, b, c takva da su brojevi $a+b, b+c, c+a$ opet iracionalni.

Rješenje:

Lema: Dato je 6 tačaka u ravni, od kojih nikoje 3 nisu kolinearne. Ako sve segmente, koje grade ove tačke, bojimo sa dvije boje, onda postoji bar jedan monohromatski trougao (stranice trougla su iste boje).

Dokaz:

Fiksirajmo jednu tačku. Ova tačka gradi 5 segmenata sa ostalim tačkama. Prema Dirihleovom principu, postoje bar tri segmenta iste boje. Neka su ova tri segmenta obojena plavom bojom. Ako bilo koji segment koji nastaje od vrhova plavih segmenata obojim plavom bojom, tada imamo monohromatski trougao. Dakle, svi segmenti koji nastaju ovim vrhovima su crvene boje. No, u tom slučaju imamo crveni monohromatski trougao.

Obojimo segment koji spaja dva iracionalna broja plavom bojom, ako je suma ta dva broja iracionalan broj. Ako je suma dva takva broja racionalan broj, segment bojimo crvenom bojom. Prema lemi, postoji uvijek bar jedan monohromatski trougao. Ako je trougao plave boje, onda je tvrdnja dokazana. Neka je monohromatski trougao crvene boje. Neka su ivice tog trougla $a+b$, $b+c$, $c+a$. Posmatrajmo sada izraz:

$$(a+b)+(b+c)-(c+a)=2b.$$

Odavde slijedi da je b racionalan broj, što je kontradikcija sa pretpostavkom zadatka.

Dakle, $a+b, b+c, c+a$ su iracionalni brojevi.