UDRUŽENJE MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE / BOSNIAN MATHEMATICAL SOCIETY
Zmaja od Bosne 35/IV, 71000 Sarajevo, Bosnia and Herzegovina
Tel. (++387)(33) 279-935; Fax: (++387)(33) 649-342

51. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE
FEDERALNO PRVENSTVO UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA
Sarajevo, 16. 4. 2011. godine

II razred

1. Odrediti koeficijent c polinoma x^2+x+c ako njegove nule x_1 i x_2 zadovoljavaju jednakost:

$$\frac{2x_1^{\ 3}}{2+x_2}+\frac{2x_2^{\ 3}}{2+x_1}=-1.$$

2. Neka je $p>2$ prost broj i neka su m i n prirodni brojevi takvi da je

$$\frac{m}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{p-1}.$$

Dokazati da je broj m djeljiv brojem p.

3. Neka je I centar upisane kružnice, a O centar opisane kružnice trougla ABC, pri čemu je $\angle ACB=30^\circ$. Na stranicama AC i BC odabrane su tačke E i D redom, tako da vrijedi $EA=AB=BD$. Dokazati da je $DE=IO$ i $p(D,E)\perp p(I,O)$.

4. Neka je n prirodan broj i posmatrajmo skup $S=\{n,n+1,n+2,\ldots,5n\}$.
   a. Dokazati da ako je skup S razbijen na dva disjunktna podskupa, onda postoje tri broja x, y, z (ne obavezno različita) koji pripadaju istom podskupu skupa S i za koje vrijedi $x+y=z$.
   b. Da li tvrdnja pod a. vrijedi ako umjesto skupa S posmatramo skup $S'=\{n,n+1,n+2,\ldots,5n-1\}$? Odgovor obrazložiti!

Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.
Vrijeme za rad: 3 sata i 30 minuta.

SRETNO!

II RAZRED

1. Zadatak

Odrediti koeficijent c polinoma x^2+x+c ako njegove nule x_1 i x_2 zadovoljavaju jednakost:

$$\frac{2x_1^{\ 3}}{2+x_2}+\frac{2x_2^{\ 3}}{2+x_1}=-1.$$

Rješenje:

Nakon množenja sa $(2+x_1)(2+x_2)$, data jednakost se transformiše u

$$2x_1^{\ 3}(2+x_1)+2x_2^{\ 3}(2+x_2)+(2+x_1)(2+x_2)=0\text{, tj.}$$

$$4(x_1^{\ 3}+x_2^{\ 3})+2(x_1^{\ 4}+x_2^{\ 4})+4+2(x_1+x_2)+x_1x_2=0. \text{ (1)}$$

Dalje je

$$x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2, \text{ (2)}$$

$$x_1^{\ 3}+x_2^{\ 3}=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2), \text{ (3)}$$

$$x_1^{\ 4}+x_2^{\ 4}=(x_1+x_2)^4-4x_1x_2(x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2})-6x_1^{\ 2}x_2^{\ 2}. \text{ (4)}$$

Prema Vieteovim pravilima je:

$$x_1+x_2=-1, \text{ (5)}$$

$$x_1x_2=c. \text{ (6)}$$

Uvrštavanjem (2) – (6) u (1), nakon sređivanja, dobije se jednadžba

$$4c^2+5c=0,$$

čija su rješenja $c_1=0$ i $c_2=-\frac{5}{4}$.

2. Zadatak

Neka je $p>2$ prost broj i neka su m i n prirodni brojevi takvi da je

$$\frac{m}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{p-1}.$$

Dokazati da je broj m djeljiv brojem p.

Rješenje:

Koristeći činjenicu da je $p-1$ paran broj, sabiranjem prvog i posljednjeg sabirka, drugog i pretposljednjeg sabirka, itd. Nakon sređivanja se desna strana može napisati u obliku $\frac{pN}{(p-1)!}$,

pa slijedi da je

$$pnN=m(p-1)!.$$

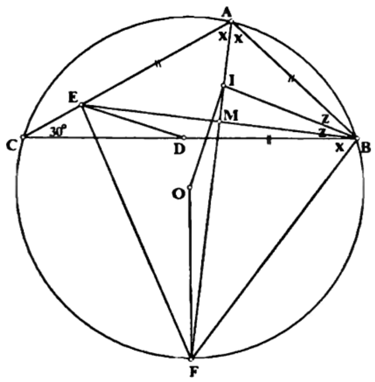
Kako p ne dijeli $(p-1)!$ to p dijeli m, što je i trebalo dokazati.

3. Zadatak

Neka je I centar upisane kružnice, a O centar opisane kružnice trougla ABC, pri čemu je $\sphericalangle ACB = 30^0$. Na stranicama AC i BC odabrane su tačke E i D, respektivno, tako da vrijedi $EA = AB = BD$.

Dokazati da je segment DE jednak i ortogonalan segmentu IO.

Rješenje:



Produžimo AI do presjeka sa opisanom kružnicom u tački F. Iz uslova da je I centar upisane kružnice slijedi da je AI simetrala ugla kod vrha A trougla ABC. Trougao EAB je jednakokraki trougao, pa je AI težišnica, simetrala i visina u tom trouglu. Neka prava AI siječe stranicu EB u njenom središtu M.

Odavde slijedi da je trougao EFB jednakokraki trougao (AM simetrala duži EB).

Sada imamo:

$$\sphericalangle EFB = 2\sphericalangle AFB = 2\sphericalangle ACB = 60^0.$$

Dakle, trougao EFB je jednakokraki trougao sa uglom od 60^0 među svojim krakovima, tj. trougao EFB je jednakostranični trougao, tj. $FB = BE$.

Koristeći činjenicu $FB = FC = FI$, zaključujemo da je trougao IBF jednakokraki (mogli smo računati uglove i zaključiti $\sphericalangle IBF = \sphericalangle BIF = \frac{\sphericalangle BAC + \sphericalangle ABC}{2}$).

Iz posljednja dva zaključka slijedi

$$FI = BE. \quad (1)$$

Tačka F je središte luka $\widehat{BC}$, a odavde slijedi da je FO simetrala tetive BC. Prava AF je simetrala duži BE, pa vrijedi $IF \perp BE$.

Dakle, $\sphericalangle OFI$ i $\sphericalangle EBD$ su uglovi sa normalnim kracima i vrijedi:

$$\sphericalangle OFI = \sphericalangle EBD. \quad (2)$$

Koristeći činjenicu da je centralni ugao dva puta veći od periferijskog ugla imamo da vrijedi $\sphericalangle AOB = 60^0$. Dakle, trougao AOB je jednakostraničan trougao, a odavde slijedi:

$$OA = OB = AB = AE = BD. \quad (3)$$

Iz $(1), (2)$ i (3) zaključujemo da vrijedi $\Delta OFI \cong \Delta EBD$, tj. $IO = ED$ i $\sphericalangle FIO = \sphericalangle BED$.

Iz $\sphericalangle FIO = \sphericalangle BED$ i $FI \perp BD$ slijedi da su i preostala dva kraka ovih uglova ortogonalna, tj. $IO \perp ED$.

4. Zadatak

Neka je n prirodan broj i posmatrajmo skup $S=\{n, n+1, n+2, ..., 5n\}$.

a. Dokazati da ako je skup S razbijen na dva disjunktna podskupa, onda postoje tri broja x, y, z (ne obavezno različita) koji pripadaju istom podskupu skupa S i za koje vrijedi $x+y=z$.

b. Da li tvrdnja pod a. vrijedi ako umjesto skupa S posmatramo skup $S'=\{n, n+1, n+2, ..., 5n-1\}$? Odgovor obrazložiti!

<u>Rješenje:</u>

a. Neka je skup S razbijen na disjunktne podskupove A i B.

Pretpostavimo da tvrdnja ne vrijedi. Neka je $n \in A$. Tada je $2n=n+n \in B$. Otuda slijedi da mora biti $4n=2n+2n \in A$. Tada je $5n=n+4n \in B$. Sada broj $3n$ pripada ili skupu A ili skupu B. Ako $3n \in A$, onda je $n+3n=4n$, a ako $3n \in B$, onda je $2n+3n=5n$. Konztradikcija sa pretpostavkom pa je treba odbaciti. Dakle, tvrdnja zadatka vrijedi.

b. Ne vrijedi. Posmatrajmo razbijanje na skupove A i B tako da je

$$A=\{n, n+1, ..., 2n-1\} \cup \{4n, 4n+1, ..., 5n-1\} \text{ i } B=\{2n, 2n+1, ..., 4n-1\}.$$