UDRUŽENJE MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE / BOSNIAN MATHEMATICAL SOCIETY
Zmaja od Bosne 35/IV, 71000 Sarajevo, Bosnia and Herzegovina
Tel. (++387)(33) 279-935; Fax: (++387)(33) 649-342

51. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE
FEDERALNO PRVENSTVO UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA
Sarajevo, 16. 4. 2011. godine

I razred

1. Faktorisati izraz:

$$(a+2b-3c)^3+(b+2c-3a)^3+(c+2a-3b)^3 .$$

2. Za okruglim stolom sjedi deset učenika. Svaki od učenika zamisli jedan broj i taj broj saopštava samo svojim susjedima (lijevo i desno) da ga pri tome drugi učenici ne čuju. Dakle, svaki učenik saopšti jedan broj i sazna brojeve koje su zamislili njegovi susjedi. Nakon toga, svaki od učenika, idući redom u krug, javno saopšti aritmetičku sredinu dva broja koja je saznao od svojih susjeda. Ako su redom javno saopšteni brojevi $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$, koji broj je zamislio učenik koji je javno saopštio broj 6?

3. Trougao AOB se rotacijom u ravni oko vrha O za ugao 90° preslikava u trougao A_1OB_1 (pri čemu se tačka A slika u tačku A_1, a tačka B u tačku B_1). Dokazati da je težišnica trougla OAB_1 na stranicu AB_1 normalna na pravu određenu tačkama A_1 i B.

4. Dokazati da za svaki prirodan broj n bar jedan od brojeva

$$A=2n-1,\ B=5n-1,\ C=13n-1$$

nije potpun kvadrat.

Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.
Vrijeme za rad: 3 sata i 30 minuta.

SRETNO!

I RAZRED

1. Zadatak

Faktorisati izraz:

$$(a+2b-3c)^3+(b+2c-3a)^3+(c+2a-3b)^3.$$

Rješenje:

Primjetimo da vrijedi

$$(a+2b-3c)+(b+2c-3a)+(c+2a-3a)=0.$$

Prema poznatom algebarskom identitetu, ako vrijedi $x+y+z=0$, onda slijedi $x^3+y^3+z^3=3xyz$.

Primjenom ovog identiteta imamo da vrijedi:

$$\begin{aligned}(a+2b-3c)^3+(b+2c-3a)^3+(c+2a-3b)^3\\ =3(a+2b-3c)(b+2c-3a)(c+2a-3b).\end{aligned}$$

I RAZRED

2. Zadatak

Za okruglim stolom sjedi deset učenika. Svaki od učenika zamisli jedan broj i taj broj saopštava samo svojim susjedima (lijevo i desno) da ga pri tome drugi učenici ne čuju. Dakle, svaki učenik saopšti jedan broj i sazna brojeve koje su zamislili njegovi susjedi. Nakon toga, svaki od učenika, idući redom u krug, javno saopšti aritmetičku sredinu dva broja koja je saznao od svojih susjeda. Ako su javno saopšteni brojevi redom $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$, koji broj je zamislio učenik koji je javno saopštio broj 6?

Rješenje:

Suma brojeva koje učenik primi je dva puta veća od broja kojeg učenik javno saopšti. Pošto su javno saopšteni brojevi $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ (redom okruglim stolom), učenik koji je javno izgovorio broj 5, primio je dva broja čija je suma jednaka 10. Njegovi susjedi su javno izgovorili brojeve 4 i 6.

Dakle, ako je učenik koji je javno izgovorio broj 6 odabrao broj x, onda je učenik koji je javno izgovorio broj 4 odabrao broj $10 - x$.

Posmatrajmo sada učenika koji je javno izgovorio broj 3. Taj učenik je primio dva broja čija suma je 6 i jedan od tih brojeva je $10 - x$ (od učenika koji je javno izgovorio broj 4). Drugi broj, koji je primio od učenika koji je javno izgovorio broj 2, jednak je $x - 4$.

Analogno, učenik koji je javno izgovorio broj 8, morao je odabrati broj $12 + x$.

No, učenik koji je javno izgovorio broj 7 je primio dva broja čija suma je 14, tj.

$$x + (12 + x) = 14,$$

tj.

$$x = 1.$$

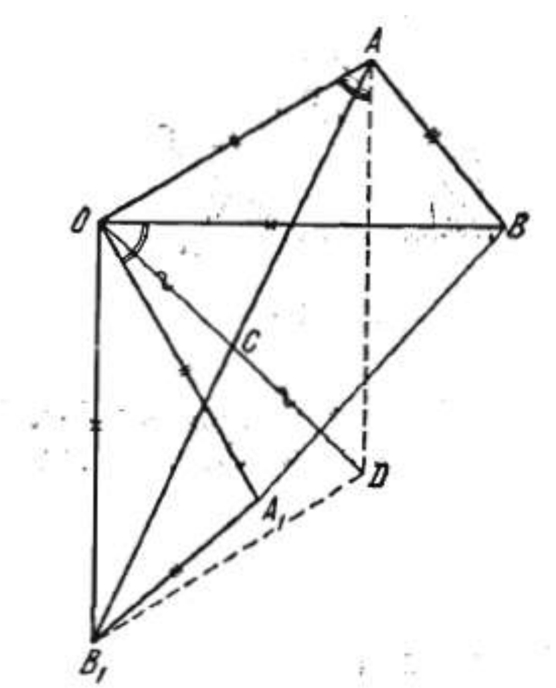
I RAZRED

3. Zadatak

Trougao AOB se rotacijom u ravni oko vrha O za ugao 90° preslikava u trougao A_1OB_1 (pri čemu se tačka A slika u tačku A_1, a tačka B u tačku B_1). Dokazati da je težišnica trougla OAB_1 na stranicu AB_1 normalna na pravu određenu tačkama A_1 i B.

Rješenje:

Neka je OC težišnica trougla OAB_1 na stranicu AB_1. Neka tačka D leži na produžetku OC tako da je $OC = CD$ (vidi sliku). Pokažimo da su trouglovi AOD i OA_1B podudarni. Prema konstrukciji je $AO = OA_1$. Dalje, četverougao AOB_1D je paralelogram (jer mu se dijagonale polove), pa imamo da je $AD = OB_1 = OB$. Napokon, $\angle OAD = \angle A_1OB$ (jer se prema konstrukciji radi o uglovima sa normalnim kracima: $AO \perp OA_1$ i $OB \perp OB_1$) i $AD \| OB_1$. Odatle slijedi da su trouglovi AOD i OA_1B podudarni i dvije stranice jednog od njih su respektivno normalne na dvije stranice drugog trougla. Slijedi da je i treća stranica prvog trougla normalna na preostalu stranicu drugog trougla, tj. $OD \perp A_1B$



I RAZRED

4. Zadatak

Za svaki prirodan broj n, bar jedan od brojeva

$$A = 2n - 1, \quad B = 5n - 1, \quad C = 13n - 1$$

nije potpun kvadrat.

Rješenje:

Posmatrajmo n po modulu 4.

- $n \equiv 0 \ (mod 4)$ ili $n \equiv 2 \ (mod 4) \Longrightarrow A \equiv 3 \ (mod 4)$ i A nije potpun kvadrat.
- $n \equiv 3 \ (mod 4) \Longrightarrow B \equiv 2 \ (mod 4)$ i B nije potpun kvadrat.
- $n \equiv 1 \ (mod 4) \Longrightarrow A = 8t + 1$, $B = 4(5t + 1)$, $C = 4(13t + 3)$. Pretpostavimo da su A, B, C potpuni kvadrati.

  Ako je B potpun kvadrat, onda je i broj $(5t + 1)$ potpun kvadrat. Slično, ako je broj C potpun kvadrat, tada i broj $(13t + 3)$ mora biti potpun kvadrat.

  Dakle, vrijedi:

  $$8t + 1 = x^2, \quad 5t + 1 = y^2, \quad 13t + 3 = z^2.$$

  Odavde slijedi:

  $$x^2 + y^2 = z^2 - 1.$$

  No, $z^2 \equiv 0 \ (mod 4)$ ili $z^2 \equiv 1 \ (mod 4) \Longrightarrow x^2 + y^2 \equiv 0 \ (mod 4)$ ili $x^2 + y^2 \equiv 3 \ (mod 4)$.

  Odavde zaključujemo da vrijedi:

  $$x^2 + y^2 \equiv 0 \ (mod 4).$$

  Dakle,

  $$x^2 \equiv y^2 \equiv 0 \ (mod 4),$$

  što je u kontradikcija sa $x^2 = 8t + 1 \equiv 1 \ (mod 4)$.